

CONCEPTOS CLAVE

CONCEPTO	TEORÍA
Operaciones con matrices	Módulo 1 (Apartado 2)
Determinante de una matriz	Módulo 1 (Apartados 5.1, 5.2 y 5.3)
Obtención de matriz inversa	Módulo 1 (Apartado 6)
Rango de una matriz	Módulo 1 (Apartado 3)
Discusión de sistemas de ecuaciones	Módulo 1 (Apartado 4)
Resolución de sistemas de ecuaciones compatibles determinados. Regla de Cramer	Módulo 1 (Apartado 5.4)
Resolución genérica de sistemas de ecuaciones. Método de Gauss	Módulo 1 (Apartado 3)
Combinación lineal de vectores	Módulo 2 (Apartado 1.4)
Dependencia e independencia lineal	Módulo 2 (Apartado 1.5)
Componentes de un vector en un base	Módulo 2 (Apartado 1.6)
Aplicaciones lineales	Módulo 2 (Apartado 2)
Polinomio característico. VAPs y VEPs	Módulo 2 (Apartado 3.3)
Diagonalización y Matriz de cambio de base	Módulo 2 (Apartado 3.3)
Sucesiones de números reales	Módulo 3 (Apartado 5)
Serie numéricas	Módulo 3 (Apartado 6)
Funciones exponenciales y logarítmicas	Módulo 4 (Apartado 7)
Funciones lineales	Módulo 4 (Apartado 2)
Composición de funciones	Módulo 4 (Apartado 1.4)
Función inversa	Módulo 4 (Apartado 1.4)
Crecimiento/Decrecimiento de polinomios	Módulo 4 (Apartado 5.2)
Indeterminaciones en límites	Módulo 5 (Apartado 1)
Continuidad de funciones	Módulo 5 (Apartado 1)
Cálculo de derivadas. Regla de la cadena	Módulo 5 (Apartados 2 y 3)
Cálculo de integrales por partes	Módulo 5 (Apartado 8.2)
Integrales típicas	Módulo 5 (Apartado 7.1)
Cálculo de recta tangente	Módulo 5 (Apartado 4.3)
Cálculo del polinomio de Taylor	Módulo 5 (Apartado 4.4)
Elasticidad	Módulo 6 (Apartado 5.1)
Cálculo del polinomio de Taylor	Módulo 5 (Apartado 4.4)
Máximos, mínimos, puntos estacionarios y puntos de inflexión	Módulo 6 (Apartado 1)
Dominio de una función	
Intervalos crecimiento / decrecimiento	Módulo 6 (Apartado 1)
Intervalos concavidad / convexidad	Módulo 6 (Apartado 2)

RESUMEN

Operaciones con matrices

- **Suma/Resta de matrices** → Sólo pueden sumarse/restarse matrices que contengan el mismo número de filas y de columnas (Por ejemplo, una matriz 2×3 sólo puede sumarse/restarse a una matriz también 2×3 , obteniendo una matriz resultado de 2×3). La suma/resta se obtiene sumando/restando término a término:

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$3+4=7$

- **Producto de matrices** → Sólo pueden multiplicarse matrices, las cuales cumplan la condición que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda. La matriz resultante tendrá el número de filas de la primera y el de columnas de la segunda. Se obtiene cada elemento de la matriz final multiplicando una fila de la primera matriz por una columna de la segunda (y sumando elemento a elemento):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \end{bmatrix}$$



Importante! El producto de matrices no es conmutativo, por lo que $A \cdot B \neq B \cdot A$

- **Producto de un número por una matriz** → Todos los elementos de la matriz se ven multiplicados por dicho número:

$$2 \times \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -18 \end{bmatrix}$$

$2 \times 4 = 8$

- **Transposición de matrices** → Consiste en intercambiar filas por columnas en una matriz, y la operación, para una determinada matriz A, se representa como A^t . Es decir, la columna 1 pasa a ser la fila 1, y así sucesivamente para todas las filas y columnas.

Determinante de una matriz

- Cálculo de **determinantes de segundo orden**:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

- Cálculo de **determinantes de tercer orden** → Se aplica la regla de Sarrus:

$$\begin{array}{l} +aei \\ +dhc \\ +gbf \\ -gec \\ -ahf \\ -dbi \end{array} \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right| = a \cdot e \cdot i + d \cdot h \cdot c + g \cdot b \cdot f - g \cdot e \cdot c - a \cdot h \cdot f - d \cdot b \cdot i$$

Obtención de matriz inversa

- **Matriz inversa** $\rightarrow A^{-1}$ es la matriz inversa de A, dado que $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \text{Matriz identidad}$.
 - Cálculo:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Matriz adjuntos}(A^t)$$

Dónde:

1. $|A| \rightarrow$ Determinante de A
2. $A^t \rightarrow$ Matriz transpuesta de A
3. Matriz de adjuntos $\rightarrow$ Cada elemento de la matriz de adjuntos es igual al determinante de la matriz original eliminando la fila y columnas del elemento en cuestión y aplicando un signo positivo o negativo según este diagrama de signos:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Ejemplificamos la siguiente matriz de adjuntos:

$$\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\det(5) & -\det(4) \\ -\det(3) & +\det(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

- **Rango de una matriz** $\rightarrow$ Número de filas linealmente independientes.
 - Cálculo $\rightarrow$ El rango de una matriz corresponde con el orden de la submatriz cuadrada de mayor orden cuyo determinante sea distinto de 0. Para obtener el rango seguiremos los siguientes pasos:
 1. Obtener el determinante de mayor orden (por ejemplo, si la matriz es 3x3 tomaríamos el determinante de toda la matriz - es decir, orden 3-) y mirar si es distinto de 0
 2. Si es distinto a 0, entonces el rango es igual al orden de la matriz (recordar que orden es igual al número de filas o columnas). Si es igual a 0, ir al paso 3.

3. Obtener todas las submatrices posibles de orden inferior (por ejemplo, si teníamos una matriz 3x3, cogeríamos todas las submatrices 2x2) y mirar si hay alguna cuyo determinante es distinto de 0.
4. Si encontramos algún determinante distinto de 0, entonces el rango es igual al orden de la submatriz. Si no, volvemos al paso 2 reduciendo un orden en las submatrices a tomar (hasta llegar al orden 1).

Discusión de sistemas de ecuaciones

Si expresamos un sistema de ecuaciones en formato matricial, podemos discutir fácilmente qué tipo de sistema de ecuaciones se trata, para ello partiendo del siguiente ejemplo, definiremos la forma matricial del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = P \\ c \cdot x + d \cdot y = Q \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & P \\ c & d & Q \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes Matriz ampliada

Discutimos el sistema:

- **Sistema compatible determinado** → Rango Matriz Coeficientes = Rango Matriz Ampliada = Número Incógnitas
- **Sistema compatible indeterminado** → Rango Matriz Coeficientes = Rango Matriz Ampliada ≠ Número Incógnitas
- **Sistema incompatible** → Rango Matriz Coeficientes < Rango Matriz Ampliada

Resolución de sistemas de ecuaciones compatibles determinados. Regla de Cramer

Podemos resolver un **Sistema Compatible Determinado** utilizando la **regla de Cramer**, que podemos describir gráficamente como:

$$\begin{bmatrix} \text{red} & \text{red} & \text{red} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{blue} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \text{blue} & \text{red} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} & \text{red} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{red} & \text{red} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} & \text{red} \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \text{red} & \text{blue} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} & \text{red} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{red} & \text{red} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} & \text{red} \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \text{red} & \text{red} & \text{blue} \\ \text{red} & \text{red} & \text{red} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{red} & \text{red} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} & \text{red} \end{vmatrix}}$$

Resolución genérica de sistemas de ecuaciones. Método de Gauss

Para resolver cualquier tipo de sistema de ecuaciones (incluido un sistema compatible determinado) podemos utilizar:

- **Método de sustitución** (Recomendable para la mayoría de sistemas sencillos) → Consiste en aislar una variable en una ecuación y sustituirla en otra, de manera sucesiva, hasta obtener los valores de las variables.
- Método de Gauss (No recomendable para aplicarlo en esta asignatura) → Consiste en realizar combinaciones lineales entre filas para fijar ceros en una de las filas, y obtener así el valor de las variables → No vale la pena estudiarlo para esta asignatura.